Lie Derivative and Killing Vector

MA Lei

October 6, 2011

1 Lie Derivative

Lie derivative(读音/li:/)翻译为李导数，是与协变导数(covariant derivative)不同的一种导数。简单的说，Lie derivative是用来比较流形上两个不同点的张量的不同的，或者说，是用来衡量张量场沿着曲线族移动时的变化的，再或者说，是用来描述流形上的张量场被沿着矢量场(或者说是曲线的切矢场)拖拽时的变化的。

由于wikipedia和一般的教科书上都有着很严格的定义和介绍，本文仅仅是作为一份note，来记录我的一些理解。文中不在重复严格定义。所以说读此文的时候需要准备一本教材来作为准确定义的参考，比如梁灿斌（第四章）。

1.1 预备知识

Pull back,是将流形$\mathscr{N}$上的张量场映射为流形$\mathscr{M}$上的张量场的映射。也就是说，如果流形$\mathscr{N}$上定义了一个张量场，现在可以通过pull back在流形$\mathscr{M}$上建立一个张量场。

Push forward，恰恰相反，是将流形上$\mathscr{M}$上的张量场推到流形$\mathscr{N}$上。也就是说，原来有一个张量场定义在$\mathscr{M}$上，现在通过push forward在流形$\mathscr{N}$上建立一个新的张量场。

这两者的区别就在于，到底原来的张量场是定义在那个流形上的。至于名字到底是pull back还是push forward，我猜大概是因为一开始的时候定义scalar field的pull back，是按照如下定义的。

$$\mathscr{M}|_P \xrightarrow{\phi} \mathscr{N}|_{\phi(P)} \xrightarrow{f} \mathscr{R} \tag{1}$$

这个定义的意思是说，P是流形$\mathscr{M}$上的一点，那么通过映射ϕ将$\mathscr{M}$光滑映射到$\mathscr{N}$上，对应的点为$\phi(P)$。函数f是定义在$\mathscr{N}$上的。那么实际上$f\circ\phi$就是函数f的pull back映射。从这个定义中可以看到，之所以叫做pull back是因为这个映射像是将$\mathscr{N}$上的函数映射到了$\mathscr{M}$上来，而原来的流形间的映射是$\mathscr{M} \xrightarrow{\phi} \mathscr{N}$，pull back正好与此相反，就像是把$\phi$做的事情pull back一样。这样相反的那个就只好叫做push forward了。

1.1.1 Lie Derivative

物理中常常需要对比两个点的张量。一种最简单的方法是直接作如下定义：

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{V(x+\delta)-V(x)}{\delta} \tag{2}$$

但是这样做会发现，在简单的平直空间中，这样定义得到的还是张量，但是如果是一个更加复杂的流行，张量性质就不能保证。然而我们又是非常希望能够得到一个张量，因为张量方程才可以保证协变性的定律。

对这个定义改进，添加联络项，将非张量的部分抵消掉，就可以得到协变导数。这个不多说。

另外一种比较的方法是，利用选定的曲线移动张量场。（实际上这个并不是与协变导数最大的区别，联络其实也可以看成是带有曲线移动性质的一项。）Lie derivative就是这样的一种方法。

Lie derivative可以理解为沿着流形上的整个原来的张量场沿着矢量场移动(对应于原来的两个流形直接的映射ϕ，或者理解为沿着以此矢量场为切矢场的曲线移动)之后，然后通过pull back把移动后的张量场pull回来，跟原来的张量场再进行比较。（所以这里有一个在preliminary的时候就每个人都会问的问题：为什么沿着曲线移动整个张量场之后，再pull back，同一点的张量场却不同了？另外，在Lie derivative作用在scalar field这种特殊情况下，退化成普通导数，跟covariant derivative类似。）

因为映射ϕ也可以描述成坐标变换，所以Lie derivative可以通过坐标变换来理解。虽然这使得Lie derivative变得狭隘了。（下面的部分参考徐建军广义相对论课件。为了使得描述更清楚，我更改了部分符号。）

流形上一点P。映射ϕ_t可以看着是无穷小坐标变换，$x'^{\mu}(P) = x^{\mu}(P) - \epsilon\xi^{\mu}(P) + ...$，此处只保留了线性项。（负号是个习惯，如果是另外一种理解，即，点的移动，而不是坐标系的移动，我们常常使用正号。） 定义一个矢量场V^{μ},下面考虑无穷小坐标变换后，

$$
\begin{aligned}
V'^{\mu}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}(x) && (3)\\
&= (\delta^{\mu}_{\nu} - \epsilon\xi^{\mu}_{,\nu}) V^{\mu}(x) && (4)\\
&= V^{\mu}(x) - \epsilon\xi^{\mu}_{,\nu} V^{\nu}(x) && (5)
\end{aligned}
$$

另一方面说，可以做Taylor展开，

$$
\begin{aligned}
V'^{\mu}(x') &= V'\mu(x) + (x' - x)V^{\mu}_{,\nu} + ... && (6)\\
&= V'^{\mu}(x) - \epsilon\xi^{\nu} V^{\mu}_{,\nu} + ... && (7)
\end{aligned}
$$

然后对比这两个式子，可以得到

$$
V^{\mu}(x) = V'^{\mu}(x) - \epsilon\xi^{\nu} V^{\mu}_{,\nu}(x) + \epsilon\xi^{\mu}_{,\nu} V^{\nu}(x) + ... \quad (8)
$$

有了这个表达式，就可以定义Lie derivative了。

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\xi} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{V'\mu(x) - V^{\mu}(x)}{\epsilon} && (9)\\
&= V^{\mu}_{,\nu}(x)\xi^{\nu} - V^{\nu}(x)\xi^{\mu}_{,\nu} && (10)\\
&= V^{\mu}_{;\nu}(x)\xi^{\nu} - V^{\nu}(x)\xi^{\mu}_{;\nu} && (11)
\end{aligned}
$$

2 Killing Vector Field

有了Lie derivative的定义，Killing矢量场的定义就容易多了（但是并不代表Killing矢量场容易）。Killing矢量场定义为使得度规的李导数为零的矢量场，或者说，是沿着矢量场的移动保证度规不变，或者说矢量场给出单参等度规群。后两者都是指的locality的不变。

所以写成公式，就是$\mathscr{L}_\xi g_{ab}=0$。或者按照定义写开，

$$\xi_{(a;b)}=0 \tag{12}$$

这个方程被称为Killing方程。

Killing矢量场的定义比较容易理解。但是为什么？为什么我们要定义一个这样的特殊的矢量场？或者说Killing矢量场物理上讲到底是什么意思？

Killing矢量场对应着一些不变性，也就是对称性。因为如果我们能够找到一个Killing矢量场，那么因为沿着以这个矢量场为切矢场的曲线移动带有物理意义的张量场，那么可以保证度规的不变。换句话说，这族曲线给我们提供了一个好用的方向。那么我们就可以选择这个方向作为坐标系的坐标轴，这样描述物理现象时，因为沿着这个轴的张量场移动具备等度规性，度规的坐标分量将与这个坐标轴对应的变量无关。而且，如果所有的Killing矢量对易，那么沿着所有Killing矢量建立坐标轴的坐标系，将会具有不含所有这些轴所对应的变量的度规(坐标分量)。

保度规的变换的多少可以反映空间的对称性，因为所有我们谈论的都是检查在移动张量场时发生的情况。

另外一个有趣的事情是，如果ξ^a为Killing矢量场，T^a为测地线的切矢场，那么$T^a\xi_a$沿测地线平移。

3 结语

以上便是关于Lie derivative和Killing矢量场的一点note。这份note会随着时间的推移（严格的说是随着我在学习研究中用到的相关知识的增多）而增加新的内容。